ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 1

დავალება № 12. ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა (ნაწილი მეორე)

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 12-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

14	15	16-ა	16-ბ	17-გ,ვ,ი	17-დ,თ,კ	18-ა,გ,ე	18-ბ,დ,ვ	19	20-ა,გ,ე	20-ბ.დ,ვ
21-ა,ზ,ლ	21-ბ,გ,თ,მ,ნ	22	23	24-ა,ბ	25	26-ა	26-ბ			

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

14. უნდა ვიპოვოთ $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

ამოხსნა. $x=x_0$ წრფე არის $f(x)$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი, თუ $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\infty$ და $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\infty$.

გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$. რადგან $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}=0$, ამიტომ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}=\infty$ ან $x=1$ არის $f(x)$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

პასუხი. $x=1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია.

16-ა. მოცემულია $f(x)=\dfrac{7x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$ ფუნქცია. უნდა ვიპოვოთ ჰორიზონტალური ასიმპტოტები.

ამოხსნა. ამისათვის უდა გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{t\to0+}\frac{7\cdot\frac{1}{t}-5}{1+\sqrt{\frac{1}{t^2}+3}}=\lim_{t\to0+}\frac{7\cdot\frac{1}{t}-5}{1+\frac{1}{|t|}\sqrt{1+3t^2}}=\lim_{t\to0+}\frac{7-5t}{t+\sqrt{1+3t^2}}=7\quad\left(|t|=t,\quad t>0\right).$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{t\to0-}\frac{7\cdot\frac{1}{t}-5}{1+\sqrt{\frac{1}{t^2}+3}}=\lim_{t\to0-}\frac{7\cdot\frac{1}{t}-5}{1-\frac{1}{t}\sqrt{1+3t^2}}=\lim_{t\to0-}\frac{7-5t}{t-\sqrt{1+3t^2}}=-7\quad\left(|t|=-t,\quad t<0\right).$$

ე. ი. $y=7$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია, როცა $x\to+\infty$, ხოლო $y=-7$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია, როცა $x\to-\infty$.

პასუხი. $y=7$ და $y=-7$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია.

17-გ.

ამოხსნა. $\lim\limits_{x\to3+}\sqrt{3x-9}=0$

პასუხი. 0.

17-ვ.

ამოხსნა. $\lim\limits_{x\to2-}\frac{x^2+4}{x-2}=\infty$, რადგან $\lim\limits_{x\to2-}\frac{x-2}{x^2+4}=0$.

პასუხი. ∞.

17-ი.

ამოხსნა. $\lim\limits_{x\to3+}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3+}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to3+}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to3+}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$.

პასუხი. $\frac{1}{4}$.

18-ა.

ამოხსნა. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-x, & x<3,\\ 3-x, & x\geq3.\end{cases}$$

ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}\left(2x^2-x\right)=18-3=15.$$

$$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}\left(3-x\right)=0.$$

პასუხი. $\lim\limits_{x\to3-}f(x)=15$, $\lim\limits_{x\to3+}f(x)=0$.

18-გ.

ამოხსნა. მოცემულია $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

უნდა ვიპოვოთ ცალმხრივი ზღვრები $x_0=4$ წერტილში. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}.$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to4-}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4+}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}.$$

პასუხი. $\lim\limits_{x\to4+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to4-}f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}$.

18-ე.

ამოხსნა. მოცემულია $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1, & x\le2,\\ 2, & x>2.\end{cases}$

გამოვთვალოთ ცალმხრივი ზღვრები

$$\lim_{x\to2-}f\left(x\right)=\lim_{x\to2-}\left(x+1\right)=3,\qquad \lim_{x\to2+}f\left(x\right)=\lim_{x\to2+}2=2$$

პასუხი. $\lim\limits_{x\to2-}f\left(x\right)=3,\quad \lim\limits_{x\to2+}f\left(x\right)=2$.

19.

ამოხსნა. მოცემულია $f\left(x\right)=\dfrac{x-5}{\left|x-5\right|}$. დავადგინოთ არსებობს თუ არა $\lim\limits_{x\to5}f\left(x\right)$. ამისათვის ვიპოვოთ ცალმხრივი ზღვრები

$$\lim_{x\to5-}f\left(x\right)=\lim_{x\to5-}\frac{x-5}{\left|x-5\right|}=\lim_{x\to5-}\frac{x-5}{-\left(x-5\right)}=-1,$$

$$\lim_{x\to5+}f\left(x\right)=\lim_{x\to5+}\frac{x-5}{\left|x-5\right|}=\lim_{x\to5+}\frac{x-5}{x-5}=1.$$

$\lim\limits_{x\to5-}f\left(x\right)\ne\lim\limits_{x\to5+}f\left(x\right)$. ამიტომ $\lim\limits_{x\to5}f\left(x\right)$ არ არსებობს.

პასუხი. $\lim\limits_{x\to5}f\left(x\right)$ არ არსებობს.

20-ა.

ამოხსნა. გამოვიკვლიოთ $f\left(x\right)=5x^2-6x+1$ ფუნქციის უწყვეტობა $x_0=2$ წერტილში

$$\lim_{x\to2}f\left(x\right)=\lim_{x\to2}\left(5x^2-6x+1\right)=20-12+1=f\left(2\right).$$

$f\left(x\right)$ უწყვეტია $x=2$ წერტილში.

პასუხი. უწყვეტია $x=2$ წერტილში.

20-გ.

ამოხსნა. შევისწავლოთ $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x-1}$ ფუნქციის უწყვეტობა $x_0=1$ წერტილში

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{2}=f\left(2\right).$$

$f\left(x\right)$ უწყვეტია $x=1$ წერტილში.

პასუხი. უწყვეტია $x=1$ წერტილში.

20-ე. $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x_0=1$.

ამოხსნა. $x_0=1$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის, ამიტომ ამ წერტილში არ არის უწყვეტი.

პასუხი. არ არის უწყვეტი.

21-ა. გამოვიკვლიოთ უწყვეტობაზე $f\left(x\right)=3x^2-6x+9$ ფუნქცია.

ამოხსნა. $f\left(x\right)$ ფუნქცია არის კვადრატული ფუნქია, ამიტომ ის უწყვეტია $\left(-\infty;+\infty\right)$ შუალედში.

პასუხი. უწყვეტია $\left(-\infty;+\infty\right)$ შუალედში.

21-ზ. $f\left(x\right)=\dfrac{3x-2}{\left(x+3\right)\left(x-6\right)}$.

ამოხსნა. $f\left(x\right)$ წარმოადგენს ორი უწყვეტი ფუნქციის შეფარდებას, ამიტომ უწყვეტი იქნება, როცა მნიშვნელი არ უდრის ნულს, ანუ $\left(x+3\right)\left(x-6\right)\neq 0$. ე. ი. $f\left(x\right)$ უწყვეტია, როცა $x\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-3;6\right)\cup\left(6;+\infty\right)$. $x=-3$, $x=6$ წყვეტის წერტილებია.

პასუხი. უწყვეტია $\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-3;6\right)\cup\left(6;+\infty\right)$ შუალედზე.

21-ლ. $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+3, & x\le 1,\\ 6x-1, & x>1.\end{cases}$

ამოხსნა.

$\lim\limits_{x\to 1-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1-}\left(2x+3\right)=5,\quad \lim\limits_{x\to 1+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1+}\left(6x-1\right)=5$.

$\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1+} f\left(x\right)=5=f\left(1\right)$.

ე. ი. $f\left(x\right)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=1$ წერტილში.

როცა $x \le 1$, მაშინ $f(x) = 2x+3$ და უწყვეტია.

როცა $x > 1$, მაშინ $f(x) = 6x-1$ და უწყვეტია.

პასუხი. უწყვეტია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში.

22.

ამოხსნა. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\sqrt[3]{x-8}+9x^{\frac{2}{3}}=29$ განტოლებას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი $[0;8]$ შუალედში.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\sqrt[3]{x-8}+9x^{\frac{2}{3}}-29$.

ეს ფუნქცია უწყვეტია ყველა წერტილში $(-\infty;+\infty)$ შუალედისა, ამიტომ უწყვეტია $[0;8]$ სეგმენტზეც. ამასთან,

$f(0)=-2+9\cdot 0-29=-31<0$,

$f(8)=0+9\cdot 2^2-29=36-29=7>0$.

ამრიგად, უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია $[0;8]$ სეგმენტის ბოლოებზე ღებულობს უარყოფით და დადებით მნიშვნელობებს, შესაბამისად, ამიტომ არსებობს ერთი მაინც ისეთი $x_1 \in (0;8)$ რიცხვი, რომ $f(x_1)=0$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $\sqrt[3]{x-8}+9x^{\frac{2}{3}}-29=0$ განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი $[0;8]$ სეგმენტიდან.

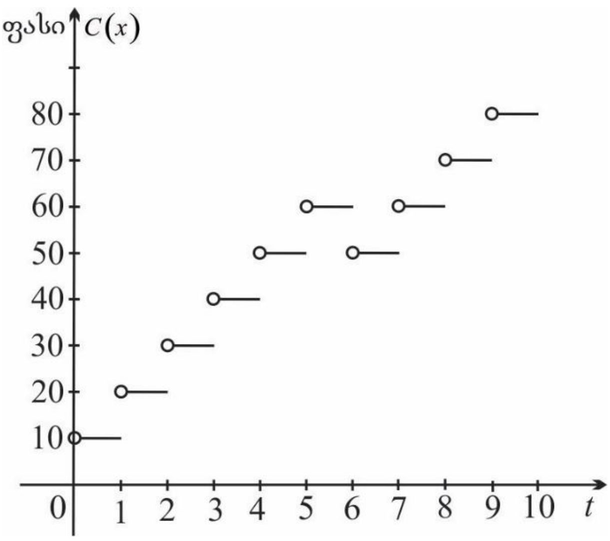
პასუხი.

24.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, გამქირავებელი კომპანია ქსეროქსის აპარატებს აქირავებს ერთი დღის განმავლობაში 10 ლარად ან კვირეულად (7 დღე) 50 ლარად. $C(x)$ არის x დღის განმავლობაში ქსეროქსის გაქირავების ღირებულება.

ა) ავაგოთ $C(x)$ ფუნქციის გრაფიკის, როცა $0 \le x \le 10$,

პასუხი.



$$C(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 10, & 0<x\le 1, \\ 20, & 1<x\le 2, \\ 30, & 2<x\le 3, \\ 40, & 3<x\le 4, \\ 50, & 4<x\le 5, \\ 60, & 5<x\le 6, \\ 70, & 6<x\le 7, \\ 60, & 7<x\le 8, \\ 70, & 8<x\le 9, \\ 80, & 9<x\le 10. \end{cases}$$

24-ბ.

პასუხი. $C(4;5)=50$, $\lim_{x\to 4.5} C(x)=50$.

24-გ.

პასუხი. $C(8)=60$. ნახაზიდან ჩანს, რომ $\lim_{x\to 8-} C(x)=60,\quad \lim_{x\to 8+} C(x)=70$.

$\lim_{x\to 8} C(x)$ არ არსებობს.

24-დ.

პასუხი. $C(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=4.5$ წერტილში , ხოლო $x=8$ წერტილში წყვეტილია.

$\lim_{x\to 8} C(x)$ არ არსებობს.

26-ა.

ამოხსნა. მოცემულია $f(x)=\begin{cases} Ax-3, & x<2, \\ 3-x+2x^2, & x\geq 2, \end{cases}$

როცა $x\neq 2$ $f(x)$ უწყვეტია.

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(Ax-3)=2A-3,\quad \lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\left(3-x+2x^2\right)=9.$$

$f(x)$ უწყვეტი იქნება $x=2$ წერტილზე, თუ $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=9$, ანუ $2A-3=9$, $A=6$.

პასუხი. როცა $A=6$, მაშინ $f(x)$ უწყვეტია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.